

Міністерство освіти і науки України
Дніпровський національний університет
імені Олеся Гончара

Кафедра математичного аналізу і оптимізації

ІНТЕРПОЛЯЦІЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Дніпро
2026

УДК 519.6(075.8)

I 73

У методичному посібнику розглянуто фундаментальні аспекти чисельних методів у частині теорії інтерполяції функцій. Матеріал охоплює класичні інтерполяційні поліноми Лагранжа та Ньютона, методи побудови інтерполянтів за допомогою розділених різниць та методику Ермітової інтерполяції. Особливу увагу приділено аналізу похибок, питанням стійкості (феномен Рунге) та оптимізації вибору вузлів за допомогою поліномів Чебишова. Окремий розділ присвячено теорії сплайнів як сучасному інструменту подолання недоліків глобальної поліноміальної інтерполяції.

Посібник призначений для студентів університету математичних та інженерних спеціальностей, які вивчають курси теорії наближень, методів прикладної математики, чисельних методів або обчислювальної математики.

Рекомендовано до друку вченою радою механіко-математичного факультету (протокол №7 від 17 лютого 2026 року).

Рецензенти:

О. О. Пипка, завідувач кафедри геометрії та алгебри Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара, доктор фізико-математичних наук, доцент.

С. В. Конарева, вчитель математики ДОЛПФМП, кандидат фізико-математичних наук.

I 73 Інтерполяція функцій однієї змінної [Електронний ресурс] : метод. посіб. / уклад. О. В. Коваленко. — Електрон. дані. — Дніпро : ДНУ, 2026. — 35 с.

Укладач: доктор фіз.-мат. наук, доцент, О. В. Коваленко

©Коваленко О. В., 2026

Зміст

Вступ	2
1 Інтерполяція функцій	3
1.1 Інтерполяційний поліном Лагранжа	3
1.2 Інтерполяційний многочлен Ньютона	6
1.3 Розділені різниці	8
1.4 Ермітова інтерполяція	12
1.5 Похибка інтерполяції	14
1.6 Стабільність інтерполяції поліномом. Приклад Рунге .	17
1.7 Вузли Чебишова	20
1.7.1 Теорема Чебишова про альтернанс	21
1.7.2 Поліноми Чебишова першого роду	23
1.7.3 Доведення теореми 7	24
1.8 Інтерполяційні сплайни	25
1.8.1 Існування інтерполяційних сплайнів	26
1.8.2 Застосування інтерполяційних сплайнів	32
Бібліографія	35

Вступ

Матеріал посібника в основному слідує книзі [2]. Ми починаємо з вивчення форм Лагранжа та Ньютона. Попри їхню теоретичну елегантність, практичне застосування часто стикається з проблемою обчислювальної складності при зміні кількості даних, що робить апарат розділених різниць критично важливим.

Одним із найважливіших уроків цього курсу є розуміння того, що збільшення степеня полінома не завжди веде до підвищення точності. Приклад Рунге наочно демонструє небезпеку осциляцій на краях інтервалу (викладення цього прикладу в тексті близьке до матеріалу з [3]).

Для мінімізації інтерполяційної похибки ми розглядаємо перехід від рівномірних сіток до нерівномірних. Окрім, власне, питання мінімізації похибки, ми знайомимо читача з важливим критерієм найкращого наближення у рівномірній метриці і поняттям точок альтернанса. Ця техніка має, зокрема, важливе значення у математичному аналізі і теорії наближень. Більш загальне формулювання теореми Чебишова про альтернанс міститься, наприклад, у [1, р. 75].

Завершальним етапом є вивчення інтерполяційних сплайнів. Замість побудови одного полінома високого степеня для всіх точок, сплайни використовують "склеєні" фрагменти поліномів низького порядку. Це забезпечує високу гладкість кривої та усуває ефект осциляцій, що робить сплайни незамінним інструментом у сучасній комп'ютерній графіці та інженерному проектуванні.

Розділ 1

Інтерполяція функцій

1.1 Інтерполяційний поліном Лагранжа

Нехай задані числа

$$x_0 < x_1 < \dots < x_n \quad (1.1)$$

і числа $y_1, \dots, y_n$. Ми хочемо знайти алгебраїчних многочлен $p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ степеня не більше ніж n , для якого

$$p_n(x_i) = y_i, i = 0, \dots, n. \quad (1.2)$$

Відмітимо, що якщо задано функцію $f: [x_0, x_n] \rightarrow \mathbb{R}$ і $y_i = f(x_i)$, $i = 1, \dots, n$, то кажуть, що многочлен p_n *інтерполює* значення функції f у точках x_i , $i = 1, \dots, n$.

Справедлива така теорема.

Теорема 1. *Нехай задано набір точок $x_0, x_1, \dots, x_n$, що задовольняють умові (1.1) і числа $y_0, y_1, \dots, y_n$. Тоді існує єдиний многочлен p_n степеня не вище n , який задовольняє умовам (1.2).*

Доведення. Спочатку доведемо існування інтерполяційного много-

члена. Розглянемо многочлени

$$L_i^{(n)}(x) = \prod_{k=0, k \neq i}^n \frac{x - x_k}{x_i - x_k}, i = 0, 1, \dots, n. \quad (1.3)$$

Легко бачити, що це многочлени степеня n , і мають місце співвідношення

$$L_i^{(n)}(x_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j; \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

Тоді многочлен

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n y_k L_k^{(n)}(x) \quad (1.4)$$

має степінь не вище n , і мають місце рівності

$$p_n(x_j) = \sum_{k=0}^n y_k L_k^{(n)}(x_j) = y_j, j = 0, \dots, n.$$

Покажемо тепер, що такий многочлен є єдиним. Припустимо, що два різні многочлени p_n і q_n степеня не вище n задовольняють умові (1.2). Тоді $r_n = p_n - q_n$ є ненульовим многочленом, що має нулі у кожній точці $x_0, x_1, \dots, x_n$. Нехай r_n є многочленом степеня $k \leq n$, тобто $r_n(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_kx^k$, де $c_k \neq 0$. За теоремою Ролля r'_n має не менше, ніж n нулів, r''_n має не менше, ніж $n - 1$ нулів, і так далі $r_n^{(k)}$ має не менше $n - k + 1 > 0$ нулів. Але це неможливо, оскільки $r_n^{(k)}$ є ненульовою константою. $\square$

Зауважимо, що многочлен (1.4) часто називають інтерполяційним многочленом Лагранжа, або інтерполяційним многочленом у формі Лагранжа.

Множина $\mathcal{P}_n$ многочленів степеня не вище n , як легко бачити, є лінійним простором розмірності $n + 1$. Звичним базисом цього простору є набір функцій

$$\{1, t, t^2, \dots, t^n\}, \quad (1.5)$$

у якому кожен многочлен $p_n \in \mathcal{P}_n$ можна записати у вигляді

$$p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n, a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}.$$

Певною модифікацією базису (1.5) є базис

$$\{1, t - x_0, (t - x_0)^2, \dots, (t - x_0)^n\},$$

який зустрічався у формулі Тейлора.

Якщо розглядати задачу пошуку інтерполяційного многочлена, як розв'язання системи лінійних рівнянь (1.2) відносно коефіцієнтів невідомого многочлена p_n при розкладі у одному з цих базисів, то отримана система може мати будь-яку кількість ненульових коефіцієнтів, а отже її розв'язання потребуватиме великої кількості обчислень.

В той же час, як неважко перевірити, многочлени (1.3), які виникли при доведенні теореми 1, є лінійно незалежними, а отже утворюють (ще один) базис простору $\mathcal{P}_n$. Крім того, відповідна система рівнянь для пошуку інтерполяційного многочлена в цьому базисі є діагональною, і її (єдиний) розв'язок було одразу записано у формулі (1.4).

Таким чином, вдалий вибір базисних функцій для простору многочленів, дозволив нам отримати ефективний спосіб розв'язання системи (1.2).

Приклад 1. Знайти многочлен найменшого степеня, графік якого проходить через точки $(0, 1)$, $(1, 2)$ і $(4, 2)$.

Використовуючи позначення теореми 1 маємо

$$L_0^{(2)}(x) = \frac{1}{4}(x-1)(x-4), L_1^{(2)}(x) = -\frac{1}{3}x(x-4) \text{ і } L_2^{(2)}(x) = \frac{1}{12}x(x-1).$$

Тому

$$p_2(x) = \frac{1}{4}(x-1)(x-4) - \frac{2}{3}x(x-4) + \frac{1}{6}x(x-1) = -\frac{x^2}{4} + \frac{5x}{4} + 1$$

є шуканим многочленом.

1.2 Інтерполяційний многочлен Ньютона

Формула (1.4) дає зручний для використання у теоретичних питаннях запис інтерполяційного многочлена. Для практичних питань цей запис часто є незручним. Зокрема, якщо до набору точок, які має інтерполювати многочлен, додати ще одну, або змінити абсцису деякої точки, то кожному з базисних функцій (1.3) доведеться перераховувати наново. Крім того, кожен елемент базису є многочленом степеня n , а, як ми побачимо пізніше, многочлени великого степеня мають серйозні недоліки з обчислювальної точки зору.

Наступна теорема дає іншу конструкцію для побудови інтерполяційного многочлена.

Теорема 2 (Інтерполяційний многочлен Ньютона). *Нехай задано різні точки $x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}$ і f — деяка функція, що визначена у кожній з цих точок. Якщо p_n і p_{n+1} — це многочлени, що інтерполюють функцію f в точках $x_0, \dots, x_n$ та $x_0, \dots, x_{n+1}$ відповідно, то справедлива рівність*

$$p_{n+1}(x) = p_n(x) + a_{n+1}w_n(x), \quad (1.6)$$

$$\text{де } w_n(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i), \quad a_{n+1} = \frac{f(x_{n+1}) - p_n(x_{n+1})}{w_n(x_{n+1})}.$$

Доведення. Оскільки інтерполяційний многочлен є єдиним, то для доведення теореми достатньо довести, що функція p_{n+1} , визначена формулою (1.6), дійсно є многочленом степеня не вище $n + 1$, і що вона інтерполює функцію f в точках $x_0, \dots, x_{n+1}$. Перше твердження безпересадно випливає з означення. Якщо $0 \leq k \leq n$, то

$$p_{n+1}(x_k) = p_n(x_k) + a_{n+1}w_n(x_k) = f(x_k) + 0 = f(x_k).$$

Крім того,

$$p_{n+1}(x_{n+1}) = p_n(x_{n+1}) + \frac{f(x_{n+1}) - p_n(x_{n+1})}{w_n(x_{n+1})} \cdot w_n(x_{n+1}) = f(x_{n+1})$$

□

Наслідок 1. Нехай $p_0(x) \equiv a_0 = f(x_0)$, $w_{-1} \equiv 1$ і числа a_k , $k \geq 1$, та функції w_k , $k \geq 0$, визначені у теоремі 2. Тоді многочлен p_n , що інтерполює функцію f в точках $x_0, \dots, x_n$ можна записати у вигляді

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)(x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_{n-1}).$$

Зауважимо, що цей запис є представленням інтерполяційного полінома у базисі

$$\{1, x - x_0, (x - x_0)(x - x_1), \dots, (x - x_0)(x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_{n-1})\}.$$

Приклад 2. Знайти многочлен найменшого степеня, графік якого проходить через точки $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(4, 2)$ і $(3, 3)$.

Використовуючи приклад 1 і теорему 2 можемо написати, що

$$p_3(x) = -\frac{x^2}{4} + \frac{5x}{4} + 1 + a_3x(x - 1)(x - 4).$$

Оскільки

$$p_3(3) = 4 - \frac{3}{2} - a_3 \cdot 6 = 3 \implies a_3 = -\frac{1}{12},$$

то приходимо до рівності

$$p_3(x) = -\frac{x^2}{4} + \frac{5x}{4} + 1 - \frac{1}{12}x(x-1)(x-4) = -\frac{1}{12}(x^3 - 2x^2 - 11x - 12).$$

1.3 Розділені різниці

Нехай задано функцію f і точки $x_0, x_1, \dots, x_n$ в її області визначення. *Розділеними різницями нульового порядку* функції f називають числа $f_0(x_k) = f[x_k] := f(x_k)$, $k = 0, \dots, n$. Далі індуктивно, *розділеними різницями порядку $j \in \{1, \dots, n\}$* називають числа

$$f_j(x_k) = f[x_k, \dots, x_{k+j}] := \frac{f_{j-1}(x_{k+1}) - f_{j-1}(x_k)}{x_{k+j} - x_k}, k = 0, \dots, n-j. \quad (1.7)$$

Приклад 3. Для функції $f(x) = \log_2 x$ обчислити усі розділені різниці в точках $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = 4$.

Обчислення за означенням (1.7) зручно робити у табличній формі. Спочатку заповнюємо перші три стовпчики значеннями k , x_k і $f(x_k)$. Потім обчислюємо розділені різниці першого порядку — отримуємо четвертий стовпчик; нарешті, маючи обчислені до того значення, можемо обчислити розділену різницю другого порядку.

k	x_k	$f_0(x_k)$	$f_1(x_k)$	$f_2(x_k)$
0	1	0	1	$-\frac{1}{6}$
1	2	1		
2	4	2	$\frac{1}{2}$	

Відмітимо, що при додаванні ще одного значення x (наприклад, $x_3 = \frac{1}{2}$), ми можемо використати всі обчислення, які були зроблено раніше.

k	x_k	$f_0(x_k)$	$f_1(x_k)$	$f_2(x_k)$	$f_3(x_k)$
0	1	0			
1	2	1	1	$-\frac{1}{6}$	
2	4	2	$\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{21}$	$\frac{1}{7}$
3	$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{6}{7}$		

Нам знадобиться така властивість розділених різниць.

Лема 1. Для довільної функції f і точок $x_0, \dots, x_n$ з її області визначення справедлива рівність

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_0].$$

Доведення. Доведення проведемо індукцією по n . При $n = 1$ маємо

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} = f[x_1, x_0].$$

Припустимо, що твердження леми справедливе для деякого $k = n \geq 1$ і покажемо, що воно справедливо при $k = n + 1$. Маємо

$$\begin{aligned} f[x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}] &= \frac{f[x_1, \dots, x_n, x_{n+1}] - f[x_0, x_1, \dots, x_n]}{x_{n+1} - x_0} \\ &= \frac{f[x_0, \dots, x_n] - f[x_1, \dots, x_{n+1}]}{x_0 - x_{n+1}} = \frac{f[x_n, \dots, x_0] - f[x_{n+1}, \dots, x_1]}{x_0 - x_{n+1}} \\ &= f[x_{n+1}, \dots, x_1, x_0]. \end{aligned}$$

□

Головним результатом цього підрозділу є доведення того факту, що коефіцієнти a_k з теореми 2 є розділеними різницями інтерпольованої функції.

Теорема 3. *В умовах теореми 2 маємо $a_k = f_k(x_k)$, $k = 0, \dots, n$, тобто для інтерполяційного многочлена p_n маємо представлення*

$$p_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1]\omega_0(x) + \dots + f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]\omega_{n-1}(x). \quad (1.8)$$

Доведення. Доведемо індукцією по n , що для многочлена p_n найменшого можливого степеня, що інтерполює значення функції f в точках $x_0, x_1, \dots, x_n$ справедлива формула (1.8). Для $n = 0$ маємо

$$p_0 = f(x_0) = f[x_0] \cdot 1,$$

а для $n = 1$ маємо

$$p_1(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0),$$

тобто при $n \leq 1$ виконується рівність (1.8).

Припустимо, що $m \geq 1$ і твердження теореми справедливе для довільного набору з $n \leq m$ точок. Покажемо, що для многочлена

$$p_{m+1}(x) = p_m(x) + f[x_0, x_1, \dots, x_m]\omega_m(x)$$

справедливі рівності

$$p_{m+1}(x_i) = f(x_i), i = 0, \dots, m + 1.$$

Маємо

$$p_{m+1}(x_i) = p_m(x_i) = f(x_i), i = 0, \dots, m,$$

а отже достатньо довести, що

$$p_{m+1}(x_{m+1}) = f(x_{m+1}).$$

Розглянемо многочлен q_m степеня не вище m , що інтерполює функцію f в точках $x_1, \dots, x_{m+1}$. Позначимо через ψ_k , $k = 0, 1, \dots, m$ функцію

$$\psi_k(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_{k+1}) = \frac{\omega_{k+1}(x)}{(x - x_0)}.$$

Відмітимо, що многочлен q_{m-1} інтерполює функцію f у наборі точок $x_1, \dots, x_m$, а на многочлен p_m можна дивитись як на многочлен, що інтерполює функцію f в точках $x_m, \dots, x_0$. Тому за індуктивним припущенням, ми можемо записати рівності

$$p_m(x) = q_{m-1}(x) + f[x_m, x_{m-1}, \dots, x_0]\psi_m(x),$$

$$q_m(x) = q_{m-1}(x) + f[x_1, \dots, x_{m+1}]\psi_m(x).$$

Віднімаючи ці рівності при $x = x_{m+1}$ і використовуючи лему 1, отримаємо

$$\begin{aligned} & p_m(x_{m+1}) - q_m(x_{m+1}) \\ &= f[x_m, x_{m-1}, \dots, x_0]\psi_m(x_{m+1}) - f[x_1, \dots, x_{m+1}]\psi_m(x_{m+1}) \\ &= \frac{\omega_{m+1}(x_{m+1})}{x_{m+1} - x_0} (f[x_m, x_{m-1}, \dots, x_0] - f[x_1, \dots, x_{m+1}]) \\ &= \frac{f[x_0, x_1, \dots, x_m] - f[x_1, \dots, x_{m+1}]}{x_{m+1} - x_0} \cdot \omega_{m+1}(x_{m+1}) \\ &= -f[x_0, x_1, \dots, x_{m+1}] \cdot \omega_{m+1}(x_{m+1}). \end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned} p_{m+1}(x_{m+1}) &= p_m(x_{m+1}) + f[x_0, x_1, \dots, x_{m+1}] \cdot \omega_{m+1}(x_{m+1}) \\ &= q_m(x_{m+1}) = f(x_{m+1}). \end{aligned}$$

□

1.4 Ермітова інтерполяція

Теорема 4. *Нехай задано функцію f і точки $x_1 < \dots < x_n$ в її області визначення і такі, що f диференційовна в цих точках. Існує єдиний многочлен p_{2n-1} степеня не вище $2n - 1$, для якого*

$$p_{2n-1}(x_i) = f(x_i), p'_{2n-1}(x_i) = f'(x_i), i = 1, \dots, n. \quad (1.9)$$

Доведення. Нагадаємо, що функції

$$L_i^{(n)}(x) = \prod_{k=1, k \neq i}^n \frac{x - x_k}{x_i - x_k}, i = 1, \dots, n,$$

які ми вже зустрічали в контексті інтерполяційного многочлена Лагранжа, є многочленами степеня $n - 1$ і для них справедливі рівності ($i, j \in \{1, \dots, n\}$)

$$L_i^{(n)}(x_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

Розглянемо функції

$$h_k(x) = \left(1 - 2(L_k^{(n)})'(x_k)(x - x_k)\right) \left(L_k^{(n)}(x)\right)^2, k = 1, \dots, n$$

та

$$q_k(x) = (x - x_k) \left(L_k^{(n)}(x)\right)^2, k = 1, \dots, n.$$

Кожна з цих функцій є многочленом степеня $2n - 1$. Крім того, з означення випливає, що

$$q_k(x_j) = 0 \forall k, j = 1, \dots, n$$

і

$$q'_k(x) = \left(L_k^{(n)}(x)\right)^2 + (x - x_k) \cdot 2L_k^{(n)}(x) \cdot (L_k^{(n)}(x))'.$$

З цієї формули отримуємо

$$q'_k(x_j) = \begin{cases} 1, & j = k, \\ 0, & j \neq k. \end{cases}$$

Також з означення безпосередньо отримуємо

$$h_k(x_j) = \begin{cases} 1, & j = k, \\ 0, & j \neq k, \end{cases}$$

і, крім того,

$$\begin{aligned} h'_k(x) &= -2(L_k^{(n)})'(x_k) \cdot \left(L_k^{(n)}(x)\right)^2 \\ &\quad + \left(1 - 2(L_k^{(n)})'(x_k)(x - x_k)\right) 2L_k^{(n)}(x) \left(L_k^{(n)}(x)\right)'. \end{aligned}$$

При $x = x_j$, $j \neq k$ маємо $h'_k(x_j) = 0$. Крім того,

$$\begin{aligned} h'_k(x_k) &= -2(L_k^{(n)})'(x_k) \cdot \left(L_k^{(n)}(x_k)\right)^2 \\ &\quad + \left(1 - 2(L_k^{(n)})'(x_k)(x_k - x_k)\right) 2L_k^{(n)}(x_k)(L_k^{(n)})'(x_k) \\ &= -2(L_k^{(n)})'(x_k) + 2(L_k^{(n)})'(x_k) = 0. \end{aligned}$$

Таким чином, $h'_k(x_j) = 0$, $j = 1, \dots, n$.

Нарешті бачимо, що многочлен

$$p_{2n-1}(x) = \sum_{k=1}^n (f(x_k)h_k(x) + f'(x_k)q_k(x))$$

є шуканим, бо його степінь не перевищує $2n-1$ і для всіх $j = 1, \dots, n$,

$$p_{2n-1}(x_j) = \sum_{k=1}^n (f(x_k)h_k(x_j) + f'(x_k)q_k(x_j)) = f(x_j) \cdot 1,$$

та

$$p'_{2n-1}(x_j) = \sum_{k=1}^n (f(x_k)h'_k(x_j) + f'(x_k)q'_k(x_j)) = f'(x_j) \cdot 1.$$

Доведемо єдиність шуканого многочлена. Припустимо, що існують два многочлени p_{2n-1} і r_{2n-1} , для яких виконуються рівності (1.9). Тоді для многочлена $\Delta = p_{2n-1} - r_{2n-1}$ степеня не вище $2n - 1$ маємо

$$\Delta(x_j) = 0, \Delta'(x_j) = 0, j = 1, \dots, n.$$

Використовуючи теорему Ролля, отримуємо, що многочлен Δ' степеня не більше $2n - 2$ має не менше ніж $n - 1$ нуль між точками $x_1, \dots, x_n$ і нулі в кожній з точок $x_1, \dots, x_n$ — всього не менше $2n - 1$ нулів. Але це неможливо для ненульового многочлена. $\square$

1.5 Похибка інтерполяції

Природними питаннями є наскільки інтерполяційний (в звичайному, або ермітовому сенсі) многочлен відрізняється від функції, яку він інтерполіює. Певну відповідь на це питання дають наступні теореми.

Теорема 5. *Нехай задано $n \in \mathbb{N}$, точки $x_0 < x_1 < \dots < x_n$, і $n + 1$ раз неперервно диференційовну функцію $f: [x_0, x_n] \rightarrow \mathbb{R}$. Якщо многочлен $p_n \in \mathcal{P}_n$ інтерполіює функцію f в точках x_i , $i = 0, \dots, n$, то для кожного $x \in [x_0, x_n]$ знайдеться точка $\xi_x \in (x_0, x_n)$ така, що*

$$f(x) - p_n(x) = \frac{w_n(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x),$$

де $w_n(x) = \prod_{k=0}^n (x - x_k)$.

Доведення. Покладемо $E(x) = f(x) - p_n(x)$, $x \in [x_0, x_n]$ та для фіксованого $t \notin \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$

$$G(x) = E(x) - \frac{w_n(x)}{w_n(t)} E(t).$$

З означення функції G маємо

$$G(x_i) = (f(x_i) - p_n(x_i)) - \frac{w_n(x_i)}{w_n(t)} E(t) = 0, i = 0, \dots, n.$$

Крім того,

$$G(t) = E(t) - \frac{w_n(t)}{w_n(t)} E(t) = 0.$$

Тому функція G має на відрізку $[x_0, x_n]$ не менше $n + 2$ нуля. Послідовно використовуючи теорему Роля, отримаємо, що G' має не менше $n + 1$ нуля, G'' — не менше n нулів, і так далі, $G^{(n+1)}$ має не менше одного нуля, тобто існує точка $\xi = \xi_t \in (x_0, x_n)$ така, що $G^{(n+1)}(\xi_t) = 0$. Знову з означення G , враховуючи, що $p_n^{(n+1)} = 0$ і $w_n^{(n+1)} = (n + 1)!$, отримуємо

$$G^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - \frac{(n + 1)!}{w_n(t)} E(t), x \in [x_0, x_n],$$

а тому

$$G^{(n+1)}(\xi) = 0 = f^{(n+1)}(\xi) - \frac{(n + 1)!}{w_n(t)} E(t),$$

звідки отримуємо необхідне співвідношення

$$E(t) = \frac{w_n(t)}{(n + 1)!} f^{(n+1)}(\xi).$$

□

Інформацію про відхилення многочлена з теореми 4 дає така теорема.

Теорема 6. *Нехай функція $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ є $2n$ разів неперервно диференційовною і задано розбиття*

$$a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq b$$

відрізка $[a, b]$. Якщо многочлен $p_{2n-1} \in \mathcal{P}_{2n-1}$ задовольняє рівностям (1.9), то для кожного $x \in [a, b]$ існує точка $\xi = \xi_x \in (a, b)$ така, що

$$f(x) - p_{2n-1}(x) = \frac{\psi_{2n}(x)}{(2n)!} f^{(2n)}(\xi_x),$$

де

$$\psi_{2n}(x) = \prod_{k=1}^n (x - x_k)^2.$$

Доведення. Позначимо

$$E(x) = f(x) - p_{2n-1}(x), x \in [a, b]$$

і для деякого фіксованого $t \notin \{x_1, \dots, x_n\}$ розглянемо функцію

$$G(x) = E(x) - \frac{\psi_{2n}(x)}{\psi_{2n}(t)} E(t), x \in [a, b].$$

Тоді

$$G(x_i) = 0 \forall i = 1, \dots, n$$

і, крім того,

$$G'(x_i) = E'(x_i) - \frac{\psi'_{2n}(x_i)}{\psi_{2n}(t)} E(t) = 0,$$

оскільки (на місці трьох крапочок стоять деякі диференційовні функції)

$$\psi'_{2n}(x) = ((x - x_i)^2 \cdot (\dots))' = 2(x - x_i)(\dots) + (x - x_i)^2(\dots)',$$

звідки випливає

$$\psi'_{2n}(x_i) = 0 \forall i = 1, \dots, n.$$

З означення випливає, що $G(t) = 0$. Таким чином, функція G має $n + 1$ нуль, n з яких має кратність не менше 2. Тому використовуючи

теорему Ролля, отримаємо існування точки $\xi_t: G^{(2n)}(\xi_t) = 0$. Тоді, враховуючи, що $p_{2n-1} \in \mathcal{P}_{2n-1}$, і означення функції ψ_{2n} , маємо

$$0 = G^{(2n)}(\xi_t) = E^{(2n)}(\xi_t) - \frac{\psi_{2n}^{(2n)}(\xi_t)}{\psi_{2n}(t)} E(t) = f^{(2n)}(\xi_t) - \frac{(2n)!}{\psi_{2n}(t)} E(t),$$

звідки отримуємо необхідну рівність

$$E(t) = \frac{f^{(2n)}(\xi_t) \cdot \psi_{2n}(t)}{(2n)!}.$$

□

1.6 Стабільність інтерполяції поліномом. Приклад Рунге

Нехай $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ — це деяка функція, про яку нам відомі її значення в точках $a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq b$. Ми можемо побудувати інтерполяційний многочлен

$$p_n(f; x) = \sum_{i=0}^n L_i^{(n)}(x) f(x_i),$$

який може виступати наближенням функції f на відрізку $[a, b]$. Відомі нам значення $f(x_i)$, $i = 1, \dots, n$ можуть містити деяку похибку (наприклад, бути результатом похибки вимірювання деякої величини, або в наслідок неточності представлення чисел в пам'яті комп'ютера). Тому виникає питання стабільності інтерполяції многочленами, яке ми сформулюємо так. Нехай задано набір значень $g(x_i)$, $i = 1, \dots, n$, причому для деякого $\varepsilon > 0$ виконуються нерівності $|g(x_i) - f(x_i)| < \varepsilon$. Чи можна стверджувати, що величина

$$\|p_n(g) - p_n(f)\|_{C[a,b]} := \max_{x \in [a,b]} |p_n(g; x) - p_n(f; x)|$$

є малою, коли ε — мале? Тобто іншими словами, чи правда, що при невеликій зміні інтерпольованих даних, інтерполяційний многочлен змінюється мало? При фіксованому n оцінка

$$\begin{aligned} \|p_n(f) - p_n(g)\|_{C[a,b]} &\leq \left\| \sum_{i=0}^n L_i^{(n)}(\cdot)(f(x_i) - g(x_i)) \right\|_{C[a,b]} \\ &\leq \varepsilon \cdot \sum_{i=0}^n \left\| L_i^{(n)}(x) \right\|_{C[a,b]} \quad (1.10) \end{aligned}$$

гарантує, що відхилення між $p_n(f)$ і $p_n(g)$ відрізняється від відхилення між значеннями f і g в точках x_i , $i = 1, \dots, n$ не більше ніж у

$$\Lambda_n := \sum_{i=0}^n \left\| L_i^{(n)}(x) \right\|_{C[a,b]}$$

разів. Числа Λ_n , відомі як константи Лебега, не є великими при малих n , а тому інтерполяційні многочлени малих степенів є стабільними в описаному вище сенсі. В той же час відомо, що для рівномірного розбиття відрізка числа Λ_n зростає експоненційно (більш точно, $\Lambda_n \sim \frac{2^n}{n \ln n}$, $n \rightarrow \infty$).

Відмітимо, що з оцінки зверху (1.10) і прямування $\Lambda_n \rightarrow \infty$ не випливає, що $\|p_n(f) - p_n(g)\|_{C[a,b]} \rightarrow \infty$, але необмежений ріст констант Лебега тісно пов'язаний з тим фактом, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{f \in C[a,b], \|f\|_{C[a,b]} \leq 1} \|f - p_n(f)\|_{C[a,b]} = \infty, \quad (1.11)$$

де $p_n(f)$ — це інтерполяційний по рівномірній сітці з n вузлами на відрізку $[a, b]$ многочлен для функції f .

Для доведення (1.11) розглянемо функцію Рунге

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, x \in [-5, 5].$$

Для простоти будемо вважати, що кількість точок інтерполяції є непарною. Тоді інтерполяційні точки мають вигляд

$$x_k = \frac{5k}{n}, k = -n, -n+1, \dots, 0, 1, \dots, n.$$

Позначимо через p інтерполяційний многочлен у точках x_k , $k = -n, \dots, n$, і нехай $q(x) = \prod_{k=-n}^n (x - x_k)$. Оскільки

$$p(x_k) = \frac{1}{1 + x_k^2}, k = -n, \dots, n,$$

то многочлен $P(x) = p(x)(x^2 + 1) - 1$ має нулі у кожній з точок x_k , $k = -n, \dots, n$, а отже

$$P(x) = q(x)r(x) \tag{1.12}$$

з деяким многочленом r . Оскільки степінь p не перевищує $2n$, то степінь P не перевищує $2n + 2$, а отже степінь r не перевищує 1. Враховуючи, що функції p і P — парні, а q — непарна, то функцію r — непарна, а отже $r(x) = c \cdot x$, $c \in \mathbb{R}$.

Підставляючи у (1.12) уявну одиницю $x = i$, отримаємо

$$-1 = q(i) \cdot c \cdot i = (ci) \cdot i \prod_{k=1}^n (-1 - x_k^2),$$

звідки

$$1 = c \cdot (-1)^n \prod_{k=1}^n (1 + x_k^2) \iff c = \frac{(-1)^n}{\prod_{k=1}^n (1 + x_k^2)}.$$

Підставляючи отримане значення c у (1.12) і ділячи обидві частини на множник $1 + x^2$, отримаємо вираз для відхилення $p - f$:

$$p(x) - \frac{1}{1 + x^2} = \frac{q(x)r(x)}{1 + x^2} = \frac{cxq(x)}{1 + x^2} = \frac{(-1)^n x^2 \prod_{k=1}^n (x^2 - x_k^2)}{(1 + x^2) \prod_{k=1}^n (1 + x_k^2)},$$

і тому асимптотичну при $n \rightarrow \infty$ поведінку відхилення $|p - f|$ визначає асимптотична поведінка величини

$$\frac{\prod_{k=1}^n |x^2 - x_k^2|}{\prod_{k=1}^n (1 + x_k^2)},$$

або величини (припускаючи, що $x \neq x_k$ для всіх k)

$$\ln \frac{\prod_{k=1}^n |x^2 - x_k^2|}{\prod_{k=1}^n (1 + x_k^2)} = \sum_{k=1}^n \ln |x^2 - x_k^2| - \sum_{k=1}^n \ln(1 + x_k^2).$$

Можна довести, що величина

$$\frac{5}{n} \left(\sum_{k=1}^n \ln(x^2 - x_k^2) - \sum_{k=1}^n \ln(1 + x_k^2) \right)$$

прямує до $I(x) := \int_0^5 (\ln |x^2 - t^2| - \ln(1 + t^2)) dt$ при $n \rightarrow \infty$, а тому множина різниць $|p(x) - f(x)|$ буде необмеженою в усіх точках x , для яких $I(x) > 0$. Величину $I(x)$ можна записати аналітично, але ми зазначимо тільки, що $x > 4 \implies I(x) > 0$, і отже $|p(x) - f(x)| \rightarrow \infty$, наприклад для всіх ірраціональних $x > 4$ (ірраціональність x гарантує, що x не буде вузлом інтерполяції).

1.7 Вузли Чебишова

У попередньому підроділі ми бачили, що інтерполяція по рівномірному розбиттю може призводити до поліномів, які сильно відрізняються від функції, яку вони інтерполюють. У зв'язку з цим виникає таке питання. Нехай P — це розбиття відрізка $[a, b]$ точками $a \leq x_0 \leq x_1 < \dots < x_n \leq b$. Знайти величину

$$I := \inf_P \sup_{f \in C^{n+1}[a,b], \|f^{(n+1)}\|_{C[a,b]} \leq 1} \|f - p_n(P, f)\|_{C[a,b]}, \quad (1.13)$$

і оптимальне розбиття, на якому досягається інфімум у правій частині; тут інфімум береться по всім розбиттям P відрізка $[a, b]$ з фіксованим n , а $p_n(P, f)$ — це многочлен степеня не вище n , що інтерполірує функцію f у точках розбиття P . Використовуючи лінійну заміну змінних від довільного відрізка $[a, b]$ можна перейти до відрізка $[-1, 1]$, тому для простоти будемо вважати, що $[a, b] = [-1, 1]$.

Метою даного підрозділу є доведення такої теореми.

Теорема 7. *В позначеннях введених вище, справедлива рівність*

$$I = \frac{1}{2^n \cdot (n+1)!}.$$

Оптимальними є вузли Чебишова $x_k = \cos \frac{k+\frac{1}{2}}{n+1}\pi$, $k = 0, \dots, n$.

З теореми 5 випливає, що шукана величина не перевищує

$$\frac{1}{(n+1)!} \inf_P \|w_n\|_{C[a,b]},$$

де $w_n(x) = \prod_{k=0}^n (x - x_k)$. Тобто постає питання пошуку многочлена степеня $n+1$ зі старшим коефіцієнтом 1, який найменше відхиляється від нуля. Еквівалентно, задача полягає у знаходженні величини

$$\frac{1}{(n+1)!} \min_{q_n \in \mathcal{P}_n} \max_{x \in [-1,1]} |x^{n+1} - q_n(x)|. \quad (1.14)$$

1.7.1 Теорема Чебишова про альтернанс

В даному пункті ми розглянемо більш загальну, ніж (1.14) задачу і отримаємо характеристику полінома найкращого наближення у рівномірній метриці. Нагадаємо, що для неперервної функції f

$$\|f\|_{C[a,b]} := \max_{t \in [a,b]} |f(t)|.$$

Ми доведемо таку теорему.

Теорема 8 (Чебишов). *Нехай задано відрізок $[a, b] \subset \mathbb{R}$ і неперервну функцію $f \in C[a, b]$. Многочлен $P_n \in \mathcal{P}_n$ є многочленом найкращого наближення для функції f на відрізку $[a, b]$, тобто*

$$\|f - P_n\|_{C[a,b]} = \inf_{P \in \mathcal{P}_n} \|f - P\|_{C[a,b]}$$

тоді і тільки тоді, коли для різниці $\Delta(t) = f(t) - P_n(t)$, $t \in [a, b]$, існують точки (які називаються точками альтернансу функції)

$$a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_{n+2} \leq b \quad (1.15)$$

такі, що для деякого $\epsilon \in \{1, -1\}$ має місце рівність

$$\Delta(x_k) = \epsilon \cdot (-1)^k \|\Delta\|_{C[a,b]}, k = 1, \dots, n+2.$$

Доведення. Припустимо, що для полінома $P_n \in \mathcal{P}_n$ має місце рівність.

$$\|f - P_n\|_{C[a,b]} = \inf_{P \in \mathcal{P}_n} \|f - P\|_{C[a,b]} = d.$$

Розглянемо різницю $\Delta = f - P_n$ і введемо до розгляду множини

$$e^+ = \{t \in [a, b] : \Delta(t) = d\},$$

$$e^- = \{t \in [a, b] : \Delta(t) = -d\}$$

Обидві множини $e^\pm$ є непорожніми, бо інакше величину $\|\Delta\|_{C[a,b]}$ можна зробити меншою замінивши P_n на $P_n + c$ з деякою константою $c \in \mathbb{R}$.

Позначимо через $e = e^+ \cup e^-$ і виділимо на відрізку $[a, b]$ точки

$$a \leq z_1 < z_2 < \dots < z_m \leq b$$

так, що $\Delta(z_k) = 0$, $k = 1, \dots, m$, кожен з відрізків

$$[a, z_1], [z_1, z_2], \dots, [z_{m-1}, z_m], [z_m, b] \quad (1.16)$$

містить точки з множини e , на кожному відрізку є тільки точки з множини e^+ або тільки точки з множини e^- , причому знак функції Δ у e -точках змінюється при переході до наступного відрізка. Покажемо, що $m \geq n + 1$. Припустимо протилежне, нехай $m \leq n$. Розглянемо многочлен

$$q(t) = \lambda(t - z_1) \cdot \dots \cdot (t - z_m) \in \mathcal{P}_n,$$

де λ вибрано настільки маленьким за модулем, що

$$\|f - (P_n - q)\|_{C[a,b]} < \|f - P_n\|_{C[a,b]}.$$

Існування такого λ стає зрозумілою, якщо виконати малюнок графіка функції Δ і врахувати, що знак q змінюється тільки в точках $z_1, \dots, z_m$, а на кожному з відрізків (1.16) містяться тільки точки з однієї з множин e^+ чи e^- , причому знаки Δ і q змінюються при переході до наступного відрізка.

Необхідність твердження теореми доведено.

Доведемо тепер достатність. Припустимо, що многочлен P_n є таким, що функція $f - P_n$ має $n + 2$ точки альтернансу (1.15), але при цьому існує многочлен $q \in \mathcal{P}_n$ такий, що

$$\|f - P_n\|_{C[a,b]} > \|f - q\|_{C[a,b]}.$$

Тоді для функції

$$S = (f - P_n) - (f - q) \in \mathcal{P}_n$$

мають місце рівності $\operatorname{sgn} S(x_k) = \operatorname{sgn}(f - P_n)(x_k)$, а отже S має не менше $n + 1$ нуля. Але це неможливо для нетривіального полінома $S \in \mathcal{P}_n$. $\square$

1.7.2 Поліноми Чебишова першого роду

Повертаючись до задачі (1.14), розглянемо функцію.

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), x \in [-1, 1], n = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.17)$$

Як показує наступна теорема, T_n є поліномом степеня n зі старшим коефіцієнтом 2^{n-1} .

Теорема 9. Для кожного $n = 0, 1, \dots$ функція T_n , означена формулою (1.17), має такі властивості:

1. $T_n \in \mathcal{P}_n$;
2. $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$, $x \in [-1, 1]$;
3. Старший коефіцієнт T_n дорівнює 2^{n-1} .

Доведення. При $n = 0$ і $n = 1$ твердження теореми перевіряються безпосередньо:

$$T_0(x) = \cos(0 \cdot \arccos x) = \cos 0 = 1,$$

$$T_1(x) = \cos(\arccos x) = x, x \in [-1, 1].$$

При $n \geq 2$ перше та третє твердження випливають з другого, за індукцією по n . Якщо у формулах

$$\cos ny \cdot \cos y = \frac{1}{2}(\cos(n+1)y - \cos(n-1)y) \iff$$

$$\cos(n+1)y = 2 \cos y \cos ny - \cos(n-1)y$$

покласти $\arccos x = y$, то отримаємо другу формулу. □

1.7.3 Доведення теореми 7

Відмітимо, що

$$|\cos x| = 1 \iff x = \pi k, k \in \mathbb{Z},$$

отже для $x \in [-1, 1]$,

$$|T_n(x)| = 1 \iff n \arccos x = \pi k, k = 0, 1, \dots, n \iff$$

$$x = \cos \frac{\pi k}{n}, k = 0, 1, \dots, n.$$

Тому за теоремою 9

$$\inf_{P_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1}} \|2^{n-1}x^n - P_{n-1}\|_{C[a,b]} = \|T_n(x)\| = 1,$$

тобто

$$\inf_{P_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1}} \|x^n - P_{n-1}\|_{C[a,b]} = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Тепер для величини I з формули (1.13) маємо

$$I \geq \frac{1}{2^n(n+1)!} \|T_{n+1}\|_{C[-1,1]} = \frac{1}{2^n(n+1)!}.$$

З іншого боку, для кожної функції f , для якої $\|f^{(n+1)}\|_{C[-1,1]} \leq 1$, враховуючи теореми 5, 7 і 9, отримаємо

$$I \leq \inf_{x_i} \frac{\|w_n(x)\|_{C[-1,1]}}{(n+1)!} \|f^{(n+1)}\|_{C[-1,1]} \leq \inf_{x_i} \frac{\|w_n(x)\|_{C[-1,1]}}{(n+1)!} = \frac{1}{2^n(n+1)!}.$$

Крім того, оптимальним положенням інтерполяційних вузлів є нулі полінома T_{n+1} , а оскільки

$$T_{n+1}(x) = 0 \iff (n+1) \arccos x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k = 0, \dots, n,$$

то приходимо до заявлених у теоремі формул для оптимальних інтерполяційних вузлів.

1.8 Інтерполяційні сплайни

Як ми бачили вище, поліноми великого степеня можуть сильно відхилятися від функції, яку вони інтерполують. Крім того, ми бачили,

що поліноми малих степенів є обчислювально стабільними в тому сенсі, що при невеликій зміні даних, які ми інтерполюємо, поліноми змінюються мало. В даному підрозділі ми розглянемо спосіб інтерполяції кусково-поліноміальними функціями, які, з одного боку, використовують поліноми малих степенів, а з іншого дозволяють мати скільки завгодно велику кількість вільних параметрів.

1.8.1 Існування інтерполяційних сплайнів

Нехай задано розбиття P

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

відрізка $[a, b]$. Функція $s: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ називається *сплайном* порядку r дефекту d з вузлами в точках $x_i, i = 1, \dots, n-1$, якщо на кожному інтервалі $(x_{i-1}, x_i), i = 1, \dots, n$, функція s є поліномом степеня не вище r і $s \in C^{r-d}[a, b]$. Позначимо через $S_{r,d}(P)$ множину усіх сплайнів порядку r дефекту d з вузлами у точках розбиття P . Відмітимо, що при $d = 0$, $S_{r,d}(P)$ співпадає з множиною поліномів $\mathcal{P}_r$.

Легко бачити, що якщо $s_1, s_2 \in S_{r,d}(P)$, і $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, то $\alpha_1 s_1 + \alpha_2 s_2 \in S_{r,d}(P)$, тобто множина $S_{r,d}(P)$ є лінійним простором. Знайдемо його розмірність.

На кожному з інтервалів $(x_{i-1}, x_i), i = 1, \dots, n$, функція s є поліномом степеня не вище r , а отже визначається $r+1$ параметром. Крім того, вимога гладкості функції s запишеться у вигляді рівностей

$$s^{(k)}(x_i - 0) = s^{(k)}(x_i + 0), i = 1, \dots, n-1, k = 0, \dots, r-d.$$

Тому всього можна очікувати, що розмірність простору $S_{r,d}(P)$ (тобто кількість вільних параметрів, що визначають сплайн) дорівнює

$$(r+1) \cdot n - (n-1) \cdot (r-d+1) = r+1 + d(n-1).$$

Ми будемо розглядати задачу інтерполяції кубічними сплайнами мінімального дефекту (тобто $r = 3$, $d = 1$) у точках $x_0, \dots, x_n$, тобто шукати сплайн $s \in S_{3,1}(P)$ такий, що

$$s(x_i) = y_i, i = 0, \dots, n, \quad (1.18)$$

де $y_0, \dots, y_n$ — довільні фіксовані числа.

При $r = 3$ і $d = 1$ простір $S_{r,d}(P)$ має $n + 3$ вільних параметрів, тому окрім інтерполяційних умов (1.18) виникають додаткові два вільних параметри.

Зазвичай, ці два параметри використовують одним з двох способів. Перший спосіб призводить до так званих *натуральних сплайнів* і полягає у додаванні умови

$$s''(a) = s''(b) = 0. \quad (1.19)$$

Другий спосіб призводить до *повних сплайнів*, крайова умова

$$s'(a) = A, s'(b) = B, \quad (1.20)$$

де A, B — фіксовані числа.

Як ми бачили раніше, вибір вдалого базису дозволяє простіше розв'язувати задачу інтерполяції. Тому наступним кроком буде пошук такого базису. Розглянемо функцію

$$B(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -2 \\ (x+2)^3, & -2 \leq x \leq -1 \\ 1 + 3(x+1) + 3(x+1)^2 - 3(x+1)^3, & -1 \leq x \leq 0 \\ 1 + 3(1-x) + 3(1-x)^2 - 3(1-x)^3, & 0 \leq x \leq 1 \\ (2-x)^3, & 1 \leq x \leq 2 \\ 0, & x \geq 2 \end{cases}$$

Очевидно, що це сплайн порядку 3 з вузлами $-2, -1, 0, 1, 2$. Крім того, легко бачити, що B є парною функцією,

$$B(-2-0) = B(-2+0) = B(2-0) = B(2+0) = 0,$$

$$B(-1-0) = B(-1+0) = B(1-0) = B(1+0) = 1,$$

$$B(-0) = B(+0) = 4.$$

Крім того,

$$B'(x) = \begin{cases} 0, & x < -2 \\ 3(x+2)^2, & -2 < x < -1 \\ 3 + 6(x+1) - 9(x+1)^2, & -1 < x < 0 \\ -3 - 6(1-x) + 9(1-x)^2, & 0 < x < 1 \\ -3(2-x)^2, & 1 < x < 2 \\ 0, & x > 2 \end{cases}$$

і знову безпосередніми обчисленнями ми отримуємо, що

$$B'(-2-0) = B'(-2+0) = B'(2-0) = B'(2+0) = 0,$$

$$B'(-1-0) = B'(-1+0) = 3,$$

$$B'(-0) = B'(+0) = 0,$$

$$B'(1-0) = B'(1+0) = -3,$$

тобто функція B є неперервно диференційовною. Далі,

$$B''(x) = \begin{cases} 0, & x < -2 \\ 6(x+2), & -2 < x < -1 \\ 6 - 18(x+1), & -1 < x < 0 \\ 6 - 18(1-x), & 0 < x < 1 \\ 6(2-x), & 1 < x < 2 \\ 0, & x > 2 \end{cases}$$

і, крім того,

$$B''(-2-0) = B''(-2+0) = B''(2-0) = B''(2+0) = 0$$

$$B''(-1-0) = B''(-1+0) = B''(1-0) = 6, B''(1+0) = 6,$$

$$B''(-0) = B''(+0) = -12.$$

Таким чином, функція B насправді є двічі неперервно диференційовною, тобто є кубічним сплайном мінімального дефекту.

Нарешті,

$$B'''(x) = \begin{cases} 0, & x < -2 \\ 6, & -2 < x < -1 \\ -18, & -1 < x < 0 \\ 18, & 0 < x < 1 \\ -6, & 1 < x < 2 \\ 0, & x > 2 \end{cases}$$

Для простоти ми будемо розглядати випадок рівновіддалених вузлів сплайна (і, відповідно, рівновіддалених інтерполяційних вузлів), тобто будемо вважати, що

$$x_k - x_{k-1} = h, k = 1, \dots, n, h = \frac{b-a}{n}.$$

. Довизначимо додаткові "вузли"

$$x_{-3} = a - 3h, x_{-2} = a - 2h, x_{-1} = a - h,$$

$$x_{n+1} = b + h, x_{n+2} = b + 2h, x_{n+3} = b + 3h,$$

і покладемо

$$B_i(x) = B\left(\frac{x - x_i}{h}\right), i = -1, 0, 1, \dots, n+1.$$

Тоді

$$\begin{aligned} B_i(x_i) &= 4, B_i(x_{i\pm 1}) = 1, B_i(x_{i\pm 2}) = 0, \\ B'_i(x_i) &= 0, B'_i(x_{i\pm 1}) = \mp \frac{3}{h}, B'_i(x_{i\pm 2}) = 0, \\ B''_i(x_i) &= -\frac{12}{h^2}, B''_i(x_{i\pm 1}) = \frac{6}{h^2}, B''_i(x_{i\pm 2}) = 0, \end{aligned}$$

і можна показати, що система функцій $B_{-1}, B_0, \dots, B_n$ є базисом простору $S_{r,d}$ (по рівномірному розбиттю). Тоді довільний сплайн q можна представити у вигляді

$$q(x) = \sum_{i=-1}^n c_i B_i(x).$$

Враховуючи означення сплайна B , маємо

$$B_i(x_k) = \begin{cases} 4, & i = k \\ 1, & i = k \pm 1 \\ 0, & |i - k| > 1 \end{cases}$$

і система рівнянь (1.18) стає

$$c_{k-1} + 4c_k + c_{k+1} = y_k, k = 0, 1, \dots, n. \quad (1.21)$$

У випадку пошуку натурального інтерполяційного сплайна (додаткові умови (1.19)) маємо

$$0 = q''(x_0) = \sum_{i=-1}^n c_i B''_i(x_0) = h^{-2}(6c_{-1} + 6c_1 - 12c_0),$$

звідки $c_{-1} = 2c_0 - c_1$. Підставимо це значення у (1.21) при $k = 0$, і отримаємо $c_0 = \frac{y_0}{6}$. Аналогічно $c_n = \frac{y_n}{6}$, і ми приходимо до системи

$$\begin{cases} 4c_1 + c_2 = y_1 - \frac{y_0}{6} \\ c_1 + 4c_2 + c_3 = y_2 \\ c_2 + 4c_3 + c_4 = y_3 \\ \dots \\ c_{n-3} + 4c_{n-2} + c_{n-1} = y_{n-2} \\ c_{n-2} + 4c_{n-1} = y_{n-1} - \frac{y_n}{6} \end{cases} \quad (1.22)$$

У випадку крайових умов (1.20) приходимо до рівнянь

$$q'(x_0) = A \iff -3h^{-1}(c_{-1} - c_1) = A \iff c_{-1} = c_1 - \frac{1}{3}hA,$$

і аналогічно

$$c_{n+1} = c_{n-1} + \frac{1}{3}hB.$$

Разом з рівняннями (1.21), отримаємо систему

$$\begin{cases} 4c_0 + 2c_1 = y_0 + \frac{1}{3}hA \\ c_0 + 4c_1 + c_2 = y_1 \\ \dots \\ c_{n-2} + 4c_{n-1} + c_n = y_{n-1} \\ 2c_{n-1} + 4c_n = y_n - \frac{1}{3}hB \end{cases} \quad (1.23)$$

Відмітимо, що обидві системи (1.22) і (1.23) є тридіагональними з діагональним домінуванням, а тому (див., напр. [2, Theorem 2.5]) вони мають єдиний розв'язок при будь-якій правій частині, який може бути знайдений за лінійний відносно n час.

Тепер сформулюємо (без доведення) результат про відхилення інтерполяційного сплайна від функції, яку він інтерполює.

Теорема 10. Нехай задано $f \in C^4[a, b]$, кубічний сплайн мінімального дефекту q з вузлами $x_1, \dots, x_{n-1}$ інтерполює функцію f в точках $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Якщо

$$\max_i (x_i - x_{i-1}) \leq h,$$

то

$$\|f - q\|_{C[a,b]} \leq \frac{5}{384} h^4 \|f^{(4)}\|_{C[a,b]}.$$

Крім того, для кожного $1 \leq k \leq 3$ існує константа $C_k > 0$ така, що

$$\|f^{(k)} - q^{(k)}\|_{C[a,b]} \leq C_k h^{4-k} \|f^{(4)}\|_{C[a,b]}.$$

1.8.2 Застосування інтерполяційних сплайнів

Розглянемо задачу наближеного розв'язання диференціального рівняння

$$-u'' + a^2 u = f(x), x \in [0, 1],$$

$a \in \mathbb{R}$, з крайовими умовами

$$u(0) = g_0, u(1) = g_1.$$

Для фіксованого n розглянемо рівномірне розбиття

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1, x_i - x_{i-1} = h, i = 1, \dots, n$$

і будемо шукати наближений розв'язок задачі u_h у вигляді

$$u_h(x) = \sum_{k=-1}^{n+1} c_k B_k(x).$$

Припускаючи, що ми знаємо значення функції f у точках x_i , $i = 0, \dots, n$, отримаємо для $i = 0, \dots, n$,

$$\begin{aligned}
-u''(x_i) + a^2 u(x_i) &= -h^{-2}(6c_{i-1} + 6c_{i+1} - 12c_i) + a^2(c_{i-1} + 4c_i + c_{i+1}) = \\
&= (-6h^{-2} + a^2)c_{i-1} + (12h^{-2} + 4a^2)c_i + (-6h^{-2} + a^2)c_{i+1} = f(x_i),
\end{aligned}
\tag{1.24}$$

Крім того, в силу крайових умов маємо

$$c_{-1} + 4c_0 + c_1 = g_0$$

і

$$c_{n-1} + 4c_n + c_{n+1} = g_1,$$

звідки

$$c_{-1} = g_0 - 4c_0 - c_1, c_{n+1} = g_1 - 4c_n - c_{n-1}.$$

Підставляючи значення c_{-1} у перше рівняння

$$(-6h^{-2} + a^2)c_{-1} + (12h^{-2} + 4a^2)c_0 + (-6h^{-2} + a^2)c_1 = f(x_0),$$

отримаємо

$$(-6h^{-2} + a^2)(g_0 - 4c_0 - c_1) + (12h^{-2} + 4a^2)c_0 + (-6h^{-2} + a^2)c_1 = f(x_0)$$

$$\iff c_0(12h^{-2} + 4a^2 + 24h^{-2} - 4a^2) = f(x_0) - g_0(-6h^{-2} + a^2)$$

$$\iff c_0 = \frac{h^2}{36} (f(x_0) - g_0(6h^{-2} + a^2)).$$

Аналогічно

$$c_n = \frac{h^2}{36} (f(x_n) - g_1(6h^{-2} + a^2)).$$

Підставляючи ці значення у систему (1.24), приходимо до системи

$$\begin{cases}
Ac_1 + Bc_2 = f(x_1) - Bc_0 \\
Bc_{i-1} + Ac_i + Bc_{i+1} = f(x_i), i = 2, \dots, n-2 \\
Bc_{n-2} + Ac_{n-1} = f(x_1) - Bc_n,
\end{cases}$$

де $A = 12h^{-2} + 4a^2$, $B = -6h^{-2} + a^2$. Відмітимо, що

$$2|B| = |-6h^{-2} + a^2| + |-6h^{-2} + a^2| < |12h^{-2} + 4a^2| = |A|,$$

і отже отримана система є тридіагональною з діагональним домінуванням, а тому вона має єдиний розв'язок, який можна знайти за лінійний час. На питанні відхилення отриманого сплайна u_h від розв'язку задачі зупинятись не будемо.

Бібліографія

- [1] E.W. Cheney. *Introduction to Approximation Theory*. McGraw-Hill Book Company, 1966.
- [2] J.F. Epperson. *An Introduction to Numerical Methods and Analysis, Solutions Manual*. John Wiley & Sons, 2014.
- [3] D.E. Speyer. Comment on " $f(x) = 1/(1+x^2)$ Lagrange polynomials do not always converge. Why?". Mathematics Stack Exchange, May 2014. URL: <https://math.stackexchange.com/q/775405>.